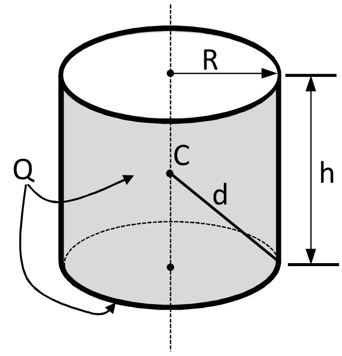
Esercizio n.1 [10 punti]

Si consideri una superficie cilindrica isolante di raggio ***R*** e altezza ***h***. Una carica ***Q>0*** è distribuita con densità superficiale uniforme **σ** su tutta la superficie laterale e sulla base inferiore; la superficie superiore quindi è scarica.
Calcolare il valore del campo elettrico nel centro del cilindro.



Dati: h = 20 cm , R = 6 cm , Q = 26 nC

Soluzione

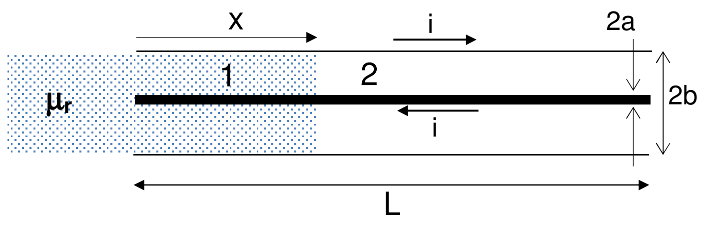
La densità di carica superficiale sarà $\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{\pi R^2 + 2\pi R l} = 3 \cdot 10^{-7} C/m^2$

Il campo dovuto alla superficie laterale sarà nullo, infatti il campo sull'asse di una spira di raggio R e con densità di carica lineare λ è: $E_z = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0} \frac{z}{(z^2+R^2)^{3/2}}$; da cui si vede che per ogni z c'è un contributo uguale e contrario dovuto a –z.
Il campo Elettrico sarà quindi solo quello dovuto alla base. Ricordando che il campo di un cerchio carico, sull'asse del cerchio, vale: $\bar{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{|z|}{\sqrt{z^2+R^2}}\right]\hat{z}$; (nota $\hat{z} = \pm\hat{z}$) si ha $E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}[-\cos\alpha]_0^{\alpha_{max}}$ essendo: $\cos\alpha_{max} = h/2d$, e:
$d^2 = [h^2/4 + R^2]$, da cui E_z = 2,4 kV/m

Esercizio n.2 [10 punti]

Un cavo coassiale è costituito da un filo cilindrico conduttore pieno di diametro ***2a*** e da una superficie esterna conduttrice di spessore trascurabile e diametro ***2b***, il cavo ha una lunghezza ***L*** molto maggiore del diametro ed è percorso da una corrente costante ***i*** che scorre nei due conduttori in versi opposti. La parte di spazio fra i due conduttori è parzialmente riempita da un materiale paramagnetico elettricamente isolato di permeabilità relativa ***μ***$_r$ (vedi figura). Calcolare la forza con cui questo materiale è attratto dal cavo quando è inserito per una lunghezza x, trascurando gli effetti ai bordi.

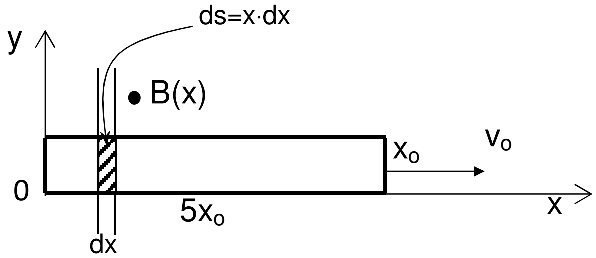
Dati: 2b = 5,42 cm ; 2a = 2 mm ; μ_r = 1,01 ; i = 2 A



La forza sarà $F_x = \frac{\partial U}{\partial x}$ in cui U è la somma delle Energie dovute al campo H nelle due zone di spazio:
$U = U_1 + U_2 = \int \frac{1}{2}\mu_r\,\mu_0 H_1^2 d\tau_1 + \int \frac{1}{2}\mu_0 H_2^2 d\tau_2$ i campi si possono calcolare dalla $H_{1,2} = \oint \bar{H} \cdot \overline{dl} = i$ da cui $H(r) = i/2\pi r$
Da cui $U = \frac{\mu_0 i^2}{4\pi}\ln\frac{b}{a}[\mu_r x + L - x] = \frac{\mu_0 i^2}{4\pi}\ln\frac{b}{a}[x(\mu_r - 1) + L]$, e: $F_x = \frac{\mu_0 i^2}{4\pi}\ln\frac{b}{a}[(\mu_r - 1)] = 13\ nN.$

Esercizio n.3 [10 punti]

Una spira conduttrice rettangolare di lati $\mathbf{x_0}$ e $\mathbf{5x_0}$ è disposta come in figura. Nello spazio è presente un campo di induzione magnetica $\overline{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{B_0}\,\mathbf{exp}\left(-\frac{x}{x_0}\right)\,\hat{\boldsymbol{z}}$,in direzione quindi perpendicolare al piano della spira. Calcolare l'energia necessaria per estrarre la spira con velocità costante $\boldsymbol{v_0}$ fino a portarla in una posizione in cui il campo B sia trascurabile. La spira è realizzata con un filo conduttore omogeneo di resistenza per unità di lunghezza **λ.**



Dati: $x_0 = 2cm$; $B_0 = 10\ mT$; $v_0 = 2\ m/s$; $\lambda = 0{,}1\ \Omega/m$

Nella spira circolerà una corrente $i=f_i/R$, dove f_i sarà la forza elettromotrice indotta nel circuito e $R = 12x_0\lambda$.

$f_i = -\frac{d\phi(B(x))}{dt}$, essendo: $d\phi(x) = ds \cdot B(x) = x_0 \cdot dx \cdot B(x)$;

$\phi(x) = \int_x^{x+5x_o} x_0 \cdot B(x) \cdot dx = B_0 x_0^2 exp(-x/x_0)\ \ [1 - e^{-5}] \cong B(x)x_0^2$,

$f_i = -\frac{d\phi(B(x))}{dt} = -B_0 x_0^2 \exp(-x/x_0)\ \left(-\frac{1}{x_0}\right)\frac{dx}{dt} = x_0 v_0 B(x)$ da cui: $i(t) = \frac{B_0 v_0}{12\lambda} exp\left(-\frac{v_0 t}{x_0}\right) = a\ exp\left(-\frac{v_0 t}{x_0}\right)$ avendo chiamato $a = \frac{B_0 v_0}{12\lambda}$. Il lavoro necessario per portare la spira fino all'infinito, oppure in una zona in cui B(x) sia trascurabile rispetto al valore di partenza [per esempio per $x \geq 5x_0$] sarà:

$$L = \int dL = \int_0^\infty P(t)\,dt = \int_0^\infty i^2(t)R \cdot dt = a^2\,R\int_0^\infty exp\left(-\frac{2v_0 t}{x_0}\right)dt = -\frac{a^2 R x_0}{2v_0}[e^{-\infty} - 1] = \frac{(B_0 x_0)^2 v_0}{24\lambda} \cong 33\ nJ$$

Il Lavoro può essere calcolato anche scrivendo $L = \int dL = \int_0^\infty \overline{F_{tot}} \cdot \overline{dx}$, tenendo conto che la forza totale sarà la somma della forza in $x+5x_0$ verso destra, e della forza in x, verso sinistra. La forza sui lati paralleli all'asse x è perpendicolare al moto, quindi non contribuisce al lavoro fatto.